# DEMOSTRACION DE LA NO EXISTENCIA DE CAMPOS GRAVITACIONALES

## SIN SINGULARIDADES DE MASA TOTAL NO NULA

POR A. EINSTEIN

(Institute for Advanced Study, Princeton. New Jersey)

---

La solución de Schwarzschild para un campo gravitacional con simetría central viene a ser singular, como es conocido, en el entorno del origen. También se considera generalmente como inverosímil que en el marco de la teoría general de la relatividad del campo gravitacional puro, existan soluciones que representen sin singularidades partículas de masa total finita no nula. Doy a continuación una demostración de la no existencia de soluciones de tal naturaleza.

Nos limitamos aquí a las soluciones que pertenecen a un espacio euclidiano.

### § 1. TEOREMA SOBRE SOLUCIONES INFINITAMENTE VECINAS

Representen $g_{ik}$ un campo arbitrario regular en cada parte, y $g_{ik} + \delta g_{ik}$ otro que difiera infinitamente poco del anterior. Sea $R_{ik}$ el tensor de curvatura de Riemann contraído (una vez). De acuerdo con Palatini $\delta R_{ik}$ puede escribirse en la forma :

$$\delta R_{ik} = -(\delta\Gamma_{ik}{}^{s})_{;\,s} + (\delta\Gamma_{i\alpha}{}^{\alpha})_{;\,k}$$

o bien

$$\delta R_{ik} = U_{ik}{}^{s}{}_{;\,s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

donde

$$U_{ik}{}^{s} = -\delta\Gamma_{ik}{}^{s} + \frac{1}{2}(\delta\Gamma_{ib}{}^{b}\delta_{k}{}^{s} + \delta\Gamma_{kb}{}^{b}\delta_{i}{}^{s}) \ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

es un tensor.

De (1) sigue mediante contracción con el tensor métrico y multiplicación por $\sqrt{-g}$

$$\sqrt{-g}\, g^{ik}\delta R_{ik} = \sqrt{-g}\, g^{ik} U_{ik}{}^{s}{}_{;s} \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Como la derivada absoluta del tensor métrico (así como la de la densidad del tensor) se anula, el segundo miembro de (2) puede ponerse en la forma

$$\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} U_{ik}{}^{s}\right)_{;s}.$$

Además, siendo la expresión entre paréntesis una densidad vectorial contra-variante, la diferenciación absoluta puede reemplazarse por la ordinaria. Después de esta transformación se logra, en lugar de (2) :

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{-g}\, g^{ik}\delta R_{ik} &= \mathfrak{V}^{s}{}_{,s} \\ \mathfrak{V}^{s} &= \sqrt{-g}\, g^{ik} U_{ik}{}^{s} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

Si se admite ahora que tanto el campo gravitacional originario como el variado satisfagan a las ecuaciones gravitacionales :

$$R_{ik} = 0,$$

tenemos que en las (3) se anulan los $\delta R_{ik}$. Por lo tanto para este caso resulta la ecuación

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}^{s}{}_{,s} &= 0 \\ \mathfrak{V}^{s} &= \sqrt{-g}\, g_{ik}\left[-\delta\Gamma_{ik}{}^{s} + \frac{1}{2}(\delta\Gamma_{ib}{}^{b}\delta_{k}{}^{s} + \delta\Gamma_{kb}{}^{b}\delta_{i}{}^{s})\right] \end{aligned}\right\} \ldots \qquad (4)$$

## § 2. APLICACIÓN DEL TEOREMA A SOLUCIONES SIN SINGULARIDADES DE MASA TOTAL FINITA

Consideremos ahora una solución sin singularidades de las ecuaciones gravitacionales perteneciente al espacio euclidiano (o bien al de Minkowski). La misma sea o independiente de $x_4$, o periódica o quasi-periódica con respecto a $x_4$. Una tal solución sería una representación teorética de un cuerpo, o respectivamente de un sistema de cuerpos que en media se encuentre en reposo con respecto al sistema de coordenadas.

A gran distancia del origen de las coordenadas, el campo de un sistema de esa naturaleza puede reemplazarse por el de una masa puntiforme en reposo, con tal que puedan despreciarse las ondas emitidas por el sistema. Una tal representación asintótica se justifica por lo que los términos de la solución sin simetría central y no ondulatorios, al alejarse, disminuyen más rápidamente que los términos procedentes de la masa total.

Este campo asintótico puede por lo tanto representarse con bastante precisión por la correspondiente solución de las ecuaciones del campo linealizadas.

Si la métrica del espacio sin campo está representada por

$$\eta_{ik} = \left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

tenemos que para esta solución asintótica

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \gamma_{ik} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5a)$$

donde en las ecuaciones del campo se deben despreciar los términos cuadráticos en las $\gamma$. Las mismas se resuelven por

$$\gamma_{st} = -\frac{2m}{r}\,\delta_{st}, \qquad \gamma_{44} = -\frac{2m}{r} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

($s$ y $t$ de 1 a 3; $\delta$ es el símbolo de Kronecker).

Esta es la solución asintótica que se considera, en la cual suponemos $m \neq 0$. Las ecuaciones del campo enseñan que $m$ es independiente de $x_4$.

Para esta solución asintótica se logra mediante (4) y (6), limitándose a los términos lineales en $m$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}^s &= -\,2\delta m \left(\frac{1}{r}\right)_{,s} \\ \mathfrak{B}^4 &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4a)$$

Estas ecuaciones rigen para las soluciones asintóticas infinitamente vecinas. Sin embargo las ecuaciones (4) rigen rigurosamente en todo el dominio.

Ahora integramos (4) en un dominio cuadridimensional, el cual está limitado espacialmente por una esfera tridimensional de radio R muy grande y los valores fijos del tiempo 0 y T. Considerado cuadridimensionalmente, este espacio es un cilindro cuyas superficies terminales son caracterizadas por $x_4 = 0$ y $x_4 = T$. Mediante aplicación del teorema de Gauss esta integral se transforma en una integral de superficie de la densidad vectorial $\mathfrak{P}^s$ sobre la superficie (de tres dimensiones) del cilindro.

Consideremos en primer lugar los aportes a la integral de las « superficies terminales » $x_4 = 0$ y $x_4 = T$. En el caso que la solución sea estática en todo el espacio o bien estacionaria o periódica de período T, esos aportes se compensan rigurosamente. Si la solución es quasi periódica, entonces las superficies terminales dan un aporte que oscila quasi-periódicamente con T, el cual empero no puede crecer indefinidamente con T.

Consideremos en segundo lugar la integral correspondiente a la napa cilíndrica. En el cálculo de esta parte estamos autorizados a utilizar la solución asintótica y luego también (4 $a$). La integración conduce a :

$$8\pi\delta m T.$$

Como esta parte crece indefinidamente con T, podemos con respecto a la misma despreciar la parte que procede de las superficies terminales, tanto mejor cuanto mayor es la T con respecto a la cual integramos. Como en su conjunto la integral, según (4), tiene que anularse, sigue

$$\delta m = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Resultado : dos soluciones sin singularidades infinitamente vecinas necesariamente tienen la misma masa total $m$.

## § 3. SOLUCIONES SEMEJANTES INFINITESIMALMENTE VECINAS

Las ecuaciones diferenciales

$$R_{ik} = 0$$

se componen aditivamente de términos lineales en los cocientes diferenciales segundos de las variables del campo, o de segundo grado en los cocientes diferenciales primeros. De esto sigue el teorema.

Si el campo $g_{ik}(x_s)$ resuelve las ecuaciones diferenciales, también resuelve las ecuaciones diferenciales el campo $g_{ik}(cx_s)$, donde $c$ es una constante (« soluciones semejantes »). Esto rige también en particular para las correspondientes soluciones asintóticas.

Por lo tanto si (6) es la solución asintótica correspondiente al primer campo, existe una segunda solución cuya correspondiente solución asintótica resulta

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{st}^{*} &= -\frac{2m}{cr}\,\delta_{st} \\ \gamma_{44}^{*} &= -\frac{2m}{cr} \end{aligned}\right\} \qquad (6a)$$

Esta es igualmente una solución asintótica de la forma (6), pero que corresponde a la masa $\frac{m}{c}$ del sistema total. Si la solución originaria no tiene singularidades, tampoco las puede tener ninguna solución semejante.

Si elegimos $c$ infinitamente vecino de 1, por lo dicho anteriormente : para cada solución, y en particular para cada solución sin singularidades de masa $m$, existe una solución (semejante) sin singularidades infinitamente vecina, de masa distinta, aunque infinitamente vecina,

$$\delta m \neq 0 \qquad (7a$$

## § 4. CONCLUSIÓN

Bajo la hipótesis de la existencia de una solución sin singularidades del tipo considerado se llega a una contradicción.

De acuerdo con (7) para una tal solución no puede existir ninguna solución infinitamente vecina de masa distinta. De acuerdo con (7 $a$) siempre habría una solución vecina (« semejante » a la originaria) de masa distinta.

Esta contradicción puede proceder tan sólo de la inexactitud de la hipótesis de la existencia de una solución sin singularidades, para una masa total distinta de cero.

*Observación :* La contradicción desaparece cuando se suprime la hipótesis de la falta de singularidades. En efecto, en este caso (4) no se cumple en cada parte, y no se puede concluir que la integral de superficie sea nula.

# DEMONSTRATION OF THE NON-EXISTENCE OF GRAVITATIONAL FIELDS WITH A NON-VANISHING TOTAL MASS FREE OF SINGULARITIES

By A. EINSTEIN
(Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey)

Schwarzschild's solution for a gravitational field with central symmetry, as it is well known, becomes singular in the neighborhood of the origin. It is also generally regarded as unlikely that within the frame of the generalized theory of relativity of the pure gravitational field, any solutions may exist that represent particles of finite no vanishing total mass without singularities. In this paper I give a proof of the non-existence of such solutions.

We shall confine ourselves here to such solutions which are plonged in an euclidean space.

## § 1. THEOREM ON INFINITELY CLOSE SOLUTIONS

Let $g_{ik}$ represent an arbitrary everywhere regular field; $g_{ik} + \delta g_{ik}$ another infinitely little different from the first. Let $R_{ik}$ represent Riemann's curvature-tensor contracted once. According to Palatini $\delta R_{ik}$ may be written in the form :

$$\delta R_{ik} = -(\delta\Gamma_{ik}{}^{s})_{;\,s} + (\delta\Gamma_{i\alpha}{}^{\alpha})_{;\,k}$$

or

$$\delta R_{ik} = U_{ik}{}^{s}{}_{;\,s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

where

$$U_{ik}{}^{s} = -\delta\Gamma_{ik}{}^{s} + \frac{1}{2}(\delta\Gamma_{ib}{}^{b}\delta_{k}{}^{s} + \delta\Gamma_{kb}{}^{b}\delta_{i}{}^{s}) \ldots\ldots\ldots \qquad (1\,a)$$

is a tensor.

From (1) by means of contraction with the metric tensor and multiplication by $\sqrt{-g}$ follows :

$$\sqrt{-g}\, g^{ik}\delta R_{ik} = \sqrt{-g}\, g^{ik} U_{ik}{}^{s}{}_{;\,s} \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Since the absolute derivative of the metric tensor (as well as that of the tensor's density) vanishes, the right-hand side of (2) may be written in the form

$$\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} U_{ik}{}^{s}\right)_{;s}.$$

Furthermore, since the expression within the brackets is the density of a contravariant vector, absolute may be replaced by ordinary differentiation. After this transformation we reach, in place of (2) :

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{-g}\, g^{ik} \delta R_{ik} &= \mathfrak{P}^{s}{}_{.s} \\ \mathfrak{P}^{s} &= \sqrt{-g}\, g^{ik} U_{ik}{}^{s} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

If now both the original and varied fields satisfy the gravitational equations :

$$R_{ik} = 0,$$

then the $\delta R_{ik}$ vanish in (3). Therefore for this case we get the equation :

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}^{s}{}_{.s} &= 0 \\ \mathfrak{P}^{s} &= \sqrt{-g}\, g^{ik}\left[-\delta\Gamma_{ik}{}^{s} + \frac{1}{2}\left(\delta\Gamma_{ib}{}^{b}\delta_{k}{}^{s} + \delta\Gamma_{kb}{}^{b}\delta_{i}{}^{s}\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

## § 2. APPLICATION OF THE THEOREM TO SOLUTIONS WITH FINITE TOTAL MASS FREE OF SINGULARITIES

Let us consider now a solution without singularities of the gravitational equations plonged in an euclidean (or Minkowski's) space, which we assume to be either independent of $x_4$, or periodic or quasi-periodic with respect to $x_4$. Such a solution would be a theoretical representation of a body, or, respectively, a system of bodies, which in the average is at rest with respect to the coordinates system.

At great distance from the origin of coordinates, the field of such a system may always be replaced by that of a resting point mass, in so far that the waves emitted by the system may be neglected. Such an asintotic representation is justified, because in the solution all the terms without central simmetry, not representing waves, decrease with increasing distance more rapidly than the terms belonging to the total mass.

Therefore, this asintotic field may be represented with satisfactory precision by the corresponding solution of the linealized field's equations.

If the metric of the space free of field is represented by :

$$\eta_{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

then for this asintotic solution we have to put

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \gamma_{ik} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5\,a)$$

where the quadratic terms in the $\gamma$'s in the field equations must be neglected. These equations are solved by :

$$\gamma_{st} = -\frac{2m}{r}\delta_{st}, \qquad \gamma_{44} = -\frac{2m}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

($s, t = 1, 2, 3$; $\delta$ is Kronecker's symbol).

This is the asintotic solution to be considered, in which we assume $m \neq 0$. The field's equations show that $m$ is independent of $x_4$.

For this asintotic solution, confining us to the linear terms in $m$, we get from (4) and (6)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}^s &= -2\delta m \left(\frac{1}{r}\right)_{,s} \\ \mathfrak{V}^4 &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4\,a)$$

These equations hold for the infinitely close asintotic equations. But equations (4) hold rigorously in the whole domain.

We integrate now (4) on a 4-dimensional domain, which is spatially bounded by a 3-dimensional sphere of a very great radius R, and the time's fixed values 0 and T. Considered 4-dimensionally, this space is a cylinder whose bases are caracterized by $x_4 = 0$, $x_4 = T$. This integral, by application of Gauss'theorem, is transformed into a surface integral of the vector's density $\mathfrak{V}$ over the 3-dimensional surface of the cylinder.

Let us consider first the contributions to the integral of the « bases » $x_4 = 0$, $x_4 = T$. If the solution be static in the whole space or, respectively, stationary or periodic with period T, those contributions cancel out rigorously. If the solution is quasi-periodic, then the bases give a contribution which oscillates quasi-periodically with T, but which cannot increase indefinitely with T.

Secondly, let us consider the integral over the cylinder's surface. In calculating this part, we are entitled to use the asintotic solution and consequently also (4 $a$). The integration leads us to :

$$8\pi\delta m\mathrm{T}.$$

This part increases indefinitely with T : therefore the greater the T with respect to which we integrate, the more justified we are in neglecting the part corresponding to the bases with respect to the former. As the whole of the integral, according to (4), must vanish, it follows that

$$\delta m = 0 \qquad (7)$$

Result : two infinitely close solutions without singularities have necessarily the same total mass $m$.

## § 3. INFINITELY CLOSE SIMILAR SOLUTIONS

The differential equations

$$\mathrm{R}_{ik} = 0$$

are built up additively of terms which are lineal in the second differential quotients or quadratic in the first differential quotients of the field's variables. From this follows the theorem.

If the field $g_{ik}(x_s)$ solves the differential equations, then the field $g_{ik}(cx_s)$ also solves them when $c$ denotes a constant (« similar solutions »). This holds also in particular for the corresponding asintotic solutions.

Therefore if (6) is the asintotic solution corresponding to the first field, a second solution exists whose corresponding asintotic solution is given by

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{st}^{*} &= -\frac{2m}{cr}\delta_{st} \\ \gamma_{44}^{*} &= -\frac{2m}{cr} \end{aligned}\right\} \qquad (6a)$$

This is likewise an asintotic solution of the form (6), but belonging to the mass $\frac{m}{c}$ of the total system. If the original solution is free of singularities, then every similar solution is also free of singularities.

If we choose $c$ infinitely little different from 1, the previous statement signifies : for each solution, in particular for each solution without singularities of mass $m$, there exist an infinitely close (similar) solution free of singularities having an infinitely little different mass,

$$\delta m \neq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7\,a)$$

## § 4. CONCLUSION

Assuming the existence of a solution free of singularities of the considered type we get a contradiction.

According to (7), for such a solution another infinitely close solution with different mass cannot exist. According to (7 $a$) there would always be a close solution (similar to the original one) with different mass.

This contradiction can only arise from the inexactitude of the hypothesis that there exist a solution free of singularities belonging to a total mass different from zero.

*Observation :* The contradiction disappears if we abandon the hypothesis of the non-existence of singularities. In fact, in this case (4) is no longer satisfied in every part, and therefore we cannot conclude that the surface integral vanishes.